

Est autorisé:  
Calculatrice

**Examen Final**  
**Analyse numérique matricielle - CSC104**

1. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

où  $\alpha$  est un réel.

- (a) Calculer, en fonction de  $\alpha$ , les valeurs propres de  $A$
- (b) Pour quelles valeurs de  $\alpha$  la matrice  $A$  est-elle définie positive?
- (c) On pose  $\alpha = \frac{1}{2}$  pour le reste du problème:

1. Donner la factorisation de Cholesky de cette matrice

2. Utiliser cette factorisation pour résoudre le système  $AX = b$  où  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. Soient  $A \in M_n(\mathbb{C})$  et  $b \in \mathbb{C}^n$ . Soient  $x$  et  $x + \delta x$  les solutions des systèmes  $Ax = b$  et  $(A + \delta A)(x + \delta x) = (b + \delta b)$  où  $(A + \delta A)$  et  $(b + \delta b)$  sont deux légères perturbations sur la matrice  $A$  et le vecteur  $b$ . On suppose que  $\|\delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$

(a) Montrer que la matrice  $(I + A^{-1}\delta A)$  est inversible et que

$$\|(I + A^{-1}\delta A)\| \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\delta A\|}$$

(b) Montrer que

$$\delta x = (I + A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}(\delta b - (\delta A)x)$$

(c) Montrer que

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \text{Cond}(A) \frac{1}{1 - \|\delta A\|\|A^{-1}\|} \left( \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)$$

où  $\text{Cond}(A)$  est le conditionnement de  $A$

(d) Montrer que la majoration d'erreur ci-dessus est optimale.

(e) Application: On considère le système

$$(S) \quad \begin{cases} 10x + 7y & = & 32 \\ 7x + 5y & = & 23 \end{cases}$$

1. Donner par la méthode de Gauss la solution de  $(S)$
2. On va perturber  $(S)$  et considérer le système:

$$(S') \quad \begin{cases} 10x + 7y & = & 32.1 \\ 7x + 5y & = & 22.9 \end{cases}$$

D'après ce qui précède, donner une estimation de l'erreur relative quant à la solution de  $(S')$

---

3. On rappelle les propriétés suivantes:

1-Si  $A$  est une matrice hermitienne définie positive alors: Si  $\omega \in ]0, 2[$  alors la méthode de relaxation converge

2-Si  $A$  est une matrice tridiagonale telle que toutes les valeurs propres de la matrice de Jacobi sont réelles alors: Les méthodes de Jacobi et de relaxation ont la même nature pour  $\omega \in ]0, 2[$ . De plus, lorsqu'elles convergent, la fonction

$$\omega \in ]0, 2[ \longmapsto \rho(\omega)$$

est optimale pour  $\omega_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(J)}}$  et dans ce cas  $\rho(L_{\omega_0}) = |\omega_0 - 1|$

A-Soit  $A$  une matrice tridiagonale hermitienne définie positive. Montrer que les méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et de relaxation ( $\omega \in ]0, 2[$ ) sont convergentes, notamment, il existe un et un seul paramètre de relaxation optimale

$$\omega_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(J)}}$$

tel que:

-si  $\rho(J) > 0$  alors  $\rho(L_{\omega_0}) = \inf_{0 < \omega < 2} \rho(L_\omega) = \omega_0 - 1 < \rho(L_1) = \rho^2(J) < \rho(J)$

-si  $\rho(J) = 0$  alors  $\omega_0 = 1$  et  $\rho(L_{\omega_0}) = \rho(L_1) = \rho(J) = 0$

B-Application: On considère le système  $AX = b$  avec:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

- (a) Ecrire la matrice de Jacobi  $J$ , calculer son rayon spectral et déduire que la méthode de Jacobi est convergente
  - (b) En déduire que la méthode de relaxation converge aussi, pour  $\omega \in ]0, 2[$  et donner la valeur optimale  $\omega_0$  de relaxation
  - (c) En partant de  $x^{(0)} = (3.386, -2.39, 1.39)$  et en utilisant la méthode de relaxation correspondant à  $\omega_0$ , donner en deux itérations une solution approchée du système  $AX = b$
- 

4. En utilisant la méthode de Jacobi, calculer les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 \\ 1 & 8 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

avec une erreur absolue de  $10^{-3}$

---

Annexe:

1-Algorithmme de Cholesky

Calcul de  $C$  triangulaire supérieure telle que  $A = C^*C$  :

$$\text{Et } 0: A = A_0 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} \end{pmatrix}$$

$$\text{Et } 1: A_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{a_{11}^{(0)}} = \alpha_1 & \frac{a_{12}^{(0)}}{\alpha_1} & \cdots & \cdots & \frac{a_{1n}^{(0)}}{\alpha_1} \\ 0 & a_{ij}^1 = a_{ij}^0 - \frac{a_{i1}^0 \cdot a_{1j}^0}{a_{11}^0} & & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

$$\text{Et } k: A_k = \begin{pmatrix} \sqrt{a_{11}^{(0)}} = \alpha_1 & \frac{a_{12}^{(0)}}{\alpha_1} & \cdots & \cdots & \frac{a_{1n}^{(0)}}{\alpha_1} \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \sqrt{a_{kk}^{(k-1)}} = \alpha_k & \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{\alpha_k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \frac{a_{ij}^k}{\alpha_k} & \\ 0 & 0 & \vdots & & \end{pmatrix} \text{ où } a_{ij}^k = a_{ij}^{k-1} - \frac{a_{ik}^{k-1} \cdot a_{kj}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}}, \quad i, j =$$

$k+1 \cdots n$

Et  $n: A_n = C$

2-Algorithmme de Jacobi: Calcul des v.p:

$p, q$  sont tel que  $|a_{pq}^k| = \max_{i \neq j} |a_{ij}^k|$

$$\alpha = \frac{-2a_{pq}^k}{a_{pp}^k - a_{qq}^k} : \begin{cases} \text{si } \alpha > 0, & t = \frac{-1 + \sqrt{1 + \alpha^2}}{\alpha} \\ \text{si } \alpha < 0, & t = \frac{-1 - \sqrt{1 + \alpha^2}}{\alpha} \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} c = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ s = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k & \text{si } i, j \neq p, q \\ a_{pj}^{k+1} = a_{jp}^{k+1} = ca_{pj}^k - sa_{jq}^k & \text{pour } j \neq p, q \\ a_{pq}^{k+1} = 0 = a_{qp}^{k+1} \\ a_{pp}^{k+1} = a_{pp}^k - ta_{pq}^k \\ a_{qq}^{k+1} = a_{qq}^k + ta_{pq}^k \\ a_{qj}^{k+1} = ca_{qj}^k + sa_{pj}^k & \text{pour } j \neq p, q \end{cases}$$